AGGIUNTA

ALLE

NUOVE DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

DELL' ABBATE

FRANCESCO OLIVA

DI

BALVANO.

NAPOLI

PRESSO PACI

1829.

Con appprovazione dell'esaminatore, e permesso de' Superiori.

PREFAZIONE.

Non v' è dubbio, o Signori, che tutte quelle scienze che sono state inventate dagli uomini, nel loro sorgimento sono state un' ammasso di errori, e di contradizioni: e che poi col progresso del tempo ciascuna scienza è stata corretta, ed accresciuta pel vantaggio, ed utile della società.

Intanto sono scorsi molti secoli, e si è vissuto sempre nell' ignoranza, e nell'errore, che due parallelogrammi, che sono tra l' istesse parallele, possono sussistere sopra l' istessa base, ed essere tra loro eguali.

Questo teorema ha sempre mantenuto in scompiglio la mente di tutti i Matematici, non che di tutti i Filosofi, stimandolo come un mistero; da non potersi dalla mente umana conseguentemente penetrare. Come di fatti dall' apparato esterno si è con tal teorema dimostrato, che un parallelogrammo di un palmo è eguale a quello di cento palmi, anzi a quello, che si estende sino all' infinito.

Questa stravagante proposizione di Euclide, o Signori, è stata la eagione non

solo di rendere la matematica erronea; ma bensì di non giungersi al fine di ritrovare l'identica misura del cerchio, (1) ch' è tanto necessaria, e giovevole al ramo astronomico.

Sicchè noi dimostreremo coll' occhio interno, ossia con evidenza di ragione, che due parallelogrammi, che sono tra l'istesse paralele, non possono affatto sussistere sopra l'istessa base, ed abbenchè abbiano la base eguale; pure l'aia del primo parallelogrammo è maggiore di quella del secondo.

Ed essendo che il secondo parallelogramma è minore del primo; n' avviene, che non si potrà coll' immaginazione allungare sino all' infinito; perchè a misura che si allunga, a quell' istessa proporzione incomincia, e finisce di distruggersi. Attendete, o Signori, le dimostrazioni, e vivete sicuri, e felici.

---

(1) La misura del cerchio si dice identica: quando quella misura, che *ab eterno* è stata data dalla natura al cerchio, e che fin ad ora non è stata a conoscenza dei letterati; colle dimostrazioni matematiche si è esattamente ritrovata; e voi la conoscerete nell' opera titolata le nuove dimostrazioni matematiche, che si vende nel largo del Gesù nuovo, nella Libreria di Marotta, e Waspandock, per prezzo di carlini 6.

DEFINIZIONI.

I.

Le diagonali, che s' intersecano nel parallogrammo rettangolo, la perpedicolare, che passa pel vertice, e che tocca i lati opposti del parallelogrammo; la parallela, che parimente passa pel vertice, e che tocca gli altri due lati del parallelogrammo; i quattro lati, che formano il parallelogrammo istesso: tutte queste quantità vengono divise per metà; non che i triangoli opposti sono tra loro eguali,

II.

Tanto la diagonale, che divide il parallelogrammo rettangolo, quanto quella che divide il parallelogrammo acutangolo; ciascuna produrrà nel suo parallelogrammo due triangoli perfettamente eguali tra di loro.

III.

La porzione delle linee, in cui per effetto dell' angolo acuto è stato serralq lo spazio, ha prodotto di perdita nell'aia del triangolo di quanto può essere un' altro piccolo

triangolo, che abbia di base l'istessa porzione delle linee, in cui è stato serrato lo spazio; ed abbia di altezza, di quanto è la base, che s' oppone all' angolo acuto del triangolo, che ha sofferto la perdita — Si avverte, che per misurare l'altezza del triangolo la base non dee essere obbliqua; ma dee essere retta. E se poi è obbliqua si dee dall' angolo ottuso alla base tirare una retta; e così colle convenevoli leggi misurarsi il triangolo: o pure misurarsi secondo si fa la dimostrazione nel teorema quinto.

IV.

Due eguali triangoli, che per effetto degli angoli acuti perdono un' eguale quantità di altezza: uniti insieme perdono quanto è un parallelogrammo, che abbia di base una delle dette quantità perdute, e di altezza quanto è la base di uno dei triangoli, che s'oppone all' angolo acuto, che ha prodotto la perdita.

ASSIOMI.

I.

Risultano sempre eguali le eguali quantità, che s' ingrandiscono coll'unione di una quantità comune.

II.

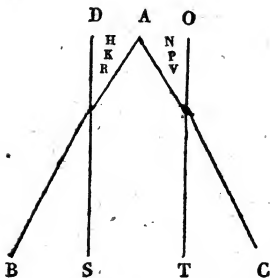
Quando la prima quantità è eguale alla seconda: la seconda eguale alla terza: sarà la terza eguale tanto alla prima, quanto alla seconda.

III.

Quando la prima quantità è eguale alla seconda, la seconda è eguale alla terza, la terza alla quarta: sarà la quarta parimente eguale tanto alla prima, quanto alla seconda.

IV.

Risultano sempre eguali le eguali quantità, che s' ingrandiscono con quantità parimente eguali.

Prop. I. Teor. I.

Due oblique linee, che hanno formato l'angolo acuto, avranno nella parte angulare con alcuni minuti della lor lunghezza serrato un certo spazio: ed esse avvicinandosi trà loro ne serreranno appresso a questo altra quantità con altri minuti, prima che coll' intera lor lunghezza avranno totalmente serrato lo spazio, o sia la distanza.

Due oblique linee AB, AC, che hanno formato l' angolo acuto BAC, avranno nella

parte angolare BAC con alcuni minuti della lor lunghezza serrato un certo spazio : ed esse linee AB AC avvicinandosi tra loro, ne serreranno appresso a questo altra quantità con gli altri minuti HN, KP, RV, prima che coll' intera lor lunghezza AB, AC avranno totalmente serrato lo spazio, o sia la distanza (1).

Poichè se AB fosse perpendicolare, ed AC orizzontale allora BAC serebbe angolo retto: e conseguentemente le rette AB, AC si sarebbero toccàte in un solo punto, e non avrebbero affatto serrato alcun spazio, ossia distanza.

Ma AB, AC sono linee obblique, e conseguentemente a misura, che si sono inclinate, o sia a misura che hanno formato l'angolo più, o meno acuto (2) a quell' istessa

(1) L' autore dell' arte di pensare definisce l' angolo, l' apertura di due linee, che s' incontrano; e riprende Euclide di aver chiamato l' angolo uno spazio. La definizione di Euclide può essere difettosa: ma non già per quel che s' imputa: poichè l' idea dell' apertura formata da due linee suppone necessariamente quella dello spazio, che queste linee racchiudono: Leggasi Coutillac, corso di studio, tomo 4, pagina 81, verso 2.

(2) L'angolo acuto vien formato non solo da

proporzione coi minuti della lor lunghezza avranno serrato nell' istesso angolo BAC i gradi di spazio (1): perchè quanto più BAC è angolo acuto, tanto maggiormente ha meno

---

due linee oblique: ma bensì da una retta, e da una obbliqua.

(1) La lunghezza delle linee, che serra lo spazio resta distrutta; perchè le linee hanno la sola lunghezza senza la larghezza; e questa lunghezza può essere di un mezzo minuto, di un minuto: di un mezzo grado di un grado ec. in somma di quanto l' angolo può essere più, o meno acuto. E nell' opera titolata le nuove dimostrazioni matematiche ho dimostrato con evidenza di ragione, che l'angolo acuto del triangolo equilatero perde di altezza in rapporto all' inclinazione un' ottava, ed una sessantaquattresima, relativamente all' altezza del quadrato, che si forma sopra un lato dell' istesso triangolo equilatero. In rapporto poi alla medesimazione, ossia alle porzioni di linee, che hanno serrato lo spazio, perde una sessantaquattresima, ed un' ottava di una sessantaquattresima; e così a proporzione per i triangoli isosceli: cioè quelli triangoli, che hanno i lati di una altezza maggiore del lato del triangolo vanno con una esatta proporzione a minorarsi in rapporto all' inclinazione, ed accrescersi coll' istessa proporzione in rapporto alla medesimazione: in modo tale, che il triangolo isoscele, che ha i suoi lati quindici volte di più di quelli del cennato triangolo equilatero, ed ha poi la base di

gradi dell' angolo retto, ed avendo gradi mancanti, le linee AB, AC, si sono rese obblique, e tra loro avvicinate: e prima di avvicinarsi aveano nell' angolo BAC una piccola porzione, o sia alcuni piccoli minuti, che stavano in minor distanza dei minuti HN, KP: così nell' avvicinarsi hanno colla lor lunghezza perfettamente serrata la distanza nell' angolo BAC.

Di vantaggio se le linee AB, AC tra loro si avvicinano di più, serveranno coi minuti HN, KP, RV, altra quantità di spazio, prima che l' intere lunghezze di AB,

---

un lato di questo equilatero triangolo, perde di altezza un quarto dell' altezza del cennato quadrato, e due sessantaquattresime dell' istesso quadrato. In riguardo poi all' inclinazione perde una metà di sessantaquattresima, ed una metà di ottava di questa sessantaquattresima.

Onde se non vi fosse l' invenzione delle linee, o Signori, non si potrebbero dimostrare le perdite di altezza, che soffrono i triangoli in rapporto agli angoli acuti: ed in sostanza l' officio delle linee in questo caso non è altro, che misurare la superficie triangolare quanto ha più, o meno perduto di altezza, a misura che gli angoli sono più, o meno acuti: senza che esse linee in rapporto alla lunghezza potessero nella superficie occupare un piccolissimo pelo: per cui la linea ha la sola lunghezza senza la larghezza.

AC avranno totalmente serrata la distanza; seguendo però l' ordine di successione; cioè i minuti di HN si serreranno prima di quelli di KP, e quelli di KP prima di quelli di RV: e così seguiteranno l' ordine di successione fino a che le line AB, AC avranno serrato lo spazio: e ciò avviene per l' istêssa ragione che abbiamo detto avanti, che quanto più le linee AB, AC si avvicinano, tanto maggiormente il numero de' gradi va a minorarsi; non che la distanza per effetto dell' obbliquità va gradatamente a serrarsi: cioè essendo la distanza di HN minore di quella di KP; e quella di KP minore di quella di RV; conseguentemente la distanza minore dee serrarsi prima della maggiore fino a che le linee AB, AC si sono perfettamente serrate.

Ma forse temerariamente gli Euclidiani asseriranno di non esser vera questa dimostrazione; per cui la rinforziamo colla seguente incontrastabile pruova, ed a tal uopo siano tirate le parallele DS, OT.

Poichè allungandosi le parallele DS, OT, per loro natura conservano sempre l' equa distanza, come la conservano ancora, se tra loro si avvicinano fino a che DS, OT contemporaneamente in tutt' i punti si sono tra loro unite, ed hannô formato una sola linea. Onde se le linee obblique AB, AC

nell' avvicinarsi tra loro conservano anche l' equa distanza, e contemporaneamente in tutti i punti si uniscono tra loro, per formare una sola linea: n' avviene l' assurdo, che quella natura, che avranno le linee parallele DS, OT; quell' istessa avranno le linee obblique AB, AC, che hanno formato l' angolo acuto BAC.

Dunque quando due line oblique, che hanno formato angolo acuto avranno nella parte angulare etc.

Abbiamo detto, o Signori, che le linee hanno la sola lunghezza, senza la larghezza: di modo che in rapporto alla larghezza sono totalmente immaginarie, che si considerano, come non esistessero: ma sono però così necessarie in matematica, che senza le quali non si possono di qualunque natura descrivere le figure: non si possono dimostrare i teoremi. Ad onta di tutto ciò per rendere maggiormente persuaso i giovanetti dimostraremo la sopradetta proposizione con un teorema metafisico, restando a tal uopo totalmente escluse le linee.

TEOREMA METAFISICO.

Due obblique linee, che hanno formato angolo acuto, avranno nella parte angulare ec.

Ad oggetto di rendersi incontrastabile questa proposizione, dee fingersi, o Signori, che vi siano due superficie, una risecata in forma di parallelogrammo rettangolo, l'altra risecata in forma di triangolo isoscele (1): e l indi si finga che esse abbiano una forza dalla natura, che da per loro fino all' ultima distruzione si restringono; e che esse forze agiscono egualmente in tutti i punti della lor superficie.

Trovandosi le superficie in tali posizioni, o Signori, n' avverà che ristringendosi il parallelogrammo, questo serberà un' equà larghezza in tutti i punti della sua lunghezza, fino a che l' istessa larghezza resterà totalmente estinta. Ristringendosi poi la superficie triangolare, ed agendo egualmente la forza in tutti i suoi punti, n' avviene, che a misura, che si restringe nella base, chè s'oppone all' angolo acuto; ed a misura che in tutti i punti della superficie la forza agisce; a quell' istessa proporzione si distrugge nella parte angulare, e continuerà sempre con quest' ordine, fino a che sarà totalmente distrutta la base.

---

(1) Il parallelogrammo avrebbe potuto essere acutangolo: non che il triangolo avrebbe potuto essere di qualunque natura; e sarebbe stato sempre l' istesso.

La ragione di tal fenomeno è chiara, o Signori; perchè essendo eguale l' azione del restringimento in tutt' i punti della superficie: ed essendo strettissima la distanza del triangolo nella parte angolare, così n' avviene, che a misura che si restringe la base, a quell' istessa ragione si serra, o sia si distrugge l' altezza nella parte angolare a motivo della strettissima distanza.

E da ciò si conchiude, che diversamente si distrugge la superficie del parallelogrammo, da quel che si distrugge la superficie triangolare: perchè quella del parallelogrammo si distrugge in un atto in tutti i punti della sua larghezza; e quella del triangolo incomincia gradatamente a distruggersi dalla parte angulare, con seguire nella sua lunghezza l' ordine di successione fino all' ultima estinzione della base (1).

(1) Atteso tutto ciò non si può nella parte angolare, o Signori, affatto negare la medesimazione in più punti. Ma alcun Euclidiano potrebbe dire, che un raggio ch' è in moto nell' aia del cerchio, la sua velocità è maggiore nella circumferenza, di quella che può essere caminando sino al centro: perchè essendo lo spazio maggiore nella circumferenza, che nel centro, ed il tempo essendo l' istesso, conseguentemente la velocità dee essere maggiore nella circumferenza, che nel centro; ed atteso

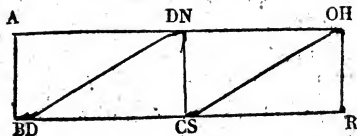
E non avviene l'istesso, o Signori, alle linee obblique che formano angolo da una parte?

Dunque due obblique linee, che hanno formato angolo ec.

---

ciò egli direbbe, che due raggi, formando nel centro angolo di qualunque modo acuto, non possono affatto produrre medesimazione alcuna.

A costui si risponderebbe; si finga un raggio fisso, ed un' altro in moto: poichè avvicinandosi il raggio, ch' è in moto al raggio fisso, con questo sul principio incomincia a formare angolo ottuso, indi retto: e se nel centro si sarà sul principio formato l'angolo ottuso, indi l' angolo retto: dee in conseguenza coll' avvicinarsi di più formare l'angolo acuto, e medesimarsi le porzioni di raggio nei punti di lunghezza; perchè di qualunque modo sia nel centro tardo il moto relativamente alla circumferenza, pure avendo i raggi coll' unione formato l' angolo retto, deono, continuandosi l' azione, formare l' angolo acuto: e per effetto del moto abbenchè tardo, e per effetto della strettissima distanza deono necessariamente unirsi in altri minuti, prima che in essa circumferenza saranno totalmente serrati. E se si vuol supporre che sempre in un punto si toccano i raggi nel centro, sino a che si sono perfettamente uniti nella circumferenza, allora ne nasce l'assurdo, che nella parte centrale le piccole porzioni del raggio ch' è in moto, saranno immobili, e ciò sarà contro la legge del moto; men-

Prop. II. Teor. II.

Abbenchè due parallelogrammi che sono tra l' istesse parallele, non possono sussistere sopra l' istessa base; avranno però la base eguale.

Abbenchè due parallelogrammi AC, OD, che sono tra l' istesse parallele AO BR, non possono sussistere sopra l' istessa base BC: sarà però la base BC del parallelogrammo AC eguale alla base DS del parallelogrammo OD.

Prima d' ogn' altro è d'uopo avvertirsi, che se il primo parallelogrammo è rettangolo, il

---

tre il raggio, ch' è in moto dee necessariamente seguire la legge di moto da un' estremo all' altro, ossia dal centro alla circumferenza: per cui a misura che i raggi si avvicinano tra loro nella circumferenza, a quell' istessa proporzione vanno a medesimarsi nella parte angolare.

secondo per necessità dee essere acutangolo; perchè il primo lato del secondo parallelogrammo, ed il lato opposto sono per necessità obbliqui: e conseguentemente il secondo parallelogrammo sarà acutangolo. Ma se il primo parallelogrammo è acutangolo, il secondo sarà più acutangolo; perchè i lati del secondo sono più obbliqui di quelli del primo. Intanto noi faremo rettangolo il primo parallelogrammo e per questo teorema, per il terzo, e per il quarto, ad oggetto di avere esatte le dimostrazioni.

Poichè essendo il parallelogrammo OD acutangolo, avrà conseguentemente due angoli ottusi OND, OSD, e due acuti NOC, NDC. Ma NDC per essere angolo acuto, i lati BN, BC hanno, pel teorema antecedente, serrato coi minuti della lor lunghezza una quantità di spazio nel formare l'istesso NDG, e questi minuti saranno in quel numero, che l'angolo NDC è più, o meno acuto, e siano a tal uopo di quanto è la distanza, che passa da D a B. (1) Ed essendo che la natura dei parallelogrammi è di avere i lati eguali, e paralleli; così a quel modo, che

(1) **Abbiamo detto di quanto è la distanza, che passa da D a B, ad oggetto di farsi la dimostrazione: ma questi minuti, per essere piccoli i parallelogrammi sono conseguentemente**

il lato BN si è ribassato sopra il lato BC, a quell' istesso modo il lato opposto OC si sarà ribassato sopra CR: e quanto spazio hanno serrato coi minuti di lunghezza BN, BC nel formare l' angolo acuto NDC; altrettanto ne avranno serrato CO, CR nel formare l' angolo esterno OSR: in modo tale che se due minuti di lunghezza sono in BD, due saranno in CS: e perciò non solo BD e eguale a CS; ma ancora il parallelogrammo OD è poggiato sopra la base DS; perchè NB si è ribassata, e serrata sopra BC sino al punto D, in cui ha formato l'angolo NDC; non che OC si è ribassata, sopra CR sino al punto S in cui ha formato l'angolo esterno OSR.

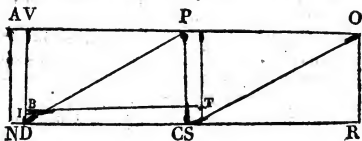
Ma il primo parallelogrammo AC sta formato sopra la base BC, ed il secondo parallelogrammo OD abbiamo dimostrato, ch'è poggiato sopra DS: conseguentemente n'avviene che i due parallelogrammi AC, OD non possono stare sopra l' istessa base BC.

E come abbiamo dimostrato ancora che i minuti di BD sono eguali ai minuti di CS: così la base del parallelogrammo OD avendo

invisibili: ed anche che fossero visibili le porzioni di linee, che hanno serrato lo spazio, restano distrutte, perchè le linee hanno, come abbiamo detto avanti, la sola lunghezza senza la larghezza.

perduto avanti una quantità di lunghezza; ed avendo poi acquistato appresso un' altra quantità eguale alla quantità perduta; così n' avviene che la base DS del parallelogrammo OD è eguale alla base BC del parallelogrammo AC.

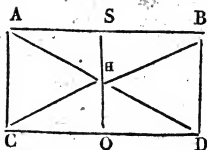
All' istesso modo potrebbe dall' altra parte dimostrarsi per le porzioni HO, NP: e conseguentemente si conchiuderebbe, che la base HN sarebbe eguale alla base OP dei parallelogrammi RN, DO; e per cui si abbia per dimostrato per farne uso nel teorema quarto, e quinto.

Dunque abbenchè due parallelogrammi ecc.

Alcuno potrebbe esserire, che il primo parallellogrammo AC potrebbe innalzarsi dai punti D, ed S dove si formono gli angoli PDS, OSR: e consoguentemente allora i parallelogrammi VC, OI sarebbero sopra l' istessa base DS.

Si risponde che in tal modo si oprarebbè da meccanico, non già da matematico; mentre i due parallelogrammi deono essere tirati da un' istesso punto, e ciascuno restare dove cade per natura; e perciò una tale assertivà non potrebbe affatto aver luogo: ma a costui si dia qualunque sodisfazione. E ciò concesso non si accorge che *incidit in scillam, qui vult evitare cariddim?* perchè l' angolo acuto ed esterno VIP non si formerà nel punto D; ma nel punto I: e conseguentemente non solo il secondo parallelogrammo sarà sopra la base IT, ed il primo sopra la base DS ma bensì senza dimostrazione chiaramente si conoscerebbe l' ineguaglianza dei due parallelogrammi; perchè il primo sarebbe maggiore del secondo di quanto è il piccolo parallelogrammo IDST. (1) Ad onta di tutto ciò metteremo in abbandono questa meccanica opposizione, e seguiremo l' ordine matematico.

---

(1) Si avverte, che prima di tirarsi la base IT, l' angolo acuto VIP ha prodotto la porzione serrata nel lato DV, di quanto è DI: ma dopo tirata la base IT si è formata l' altra porzione serrata nell' istessa base IT, di quanto è IB; e ciò avvenuto per causa dell' angolo interno, ed acuto PBT: e perciò oltre della mancanza di quanto è il parallelogrammo IDST, come abbiamo detto di sopra, vi sarebbe la

Prop. III. Teorema III.

Quando da una parte una retta, ed una perpendicolare si sono unite con uno dei loro estremi: e dall'altra parte un' altra retta eguale alla prima, coll' altro estremo della perpendicolare si è all' istesso modo unita: e quando dal rimanente estremo di una retta al rimanente estremo dell'altra retta si è tirata una linea obbliqua, la quale con essersi intersecata colla perpendicolare ha formato due triangoli: ne risulta che questi due triangoli sono tra loro eguali.

Quando la perpendicolare SO colla retta

---

mancanza nell' angolo acuto POS, e doppia mancanza nell' angolo acuto PRS; perchè una è in NC, di quanto è ND; l' altra è in IT, di quanto è IB; che poi ID, ch' è nel lato DV va a conto del perallelogrammo IS.

SA si sono da una parte unite coi loro estremi nel punto S: e dall'altra parte la retta OD eguale alla prima SA si è unita con SO anche cogli estremi nel punto O: e quando dal rimanente estremo di SA al rimanente estremo di OD, e propriamente dai punti A, e D si è tirata la linea obbliqua AD, che con essersi intersecata con SO ha prodotti due triangoli HAS, HDO: io dico che questi due triangoli sono tra loro eguali.

La retta SA si allunga sino al punto B di quanto è l' istsssa SA; e la retta OD parimente si allunga sino al punto C di quanto è l' istessa OD, in modo che AB, CD restano eguali, e divise per metà da SO: e dai punti A, e C si tira AC, che sarà parallela ad SO; e dai punti B, e D si tira BD, che parimente sarà parallela all' istessa SO: in modo che resta formato il parallelogrammo rettangolo ACDB: ed in fine si tira la diagonale BC, che resta intersecata colla diagonale AD, e colla perpendicolare SO nel vertice H.

Poichè essendo ACDB un parallelogrammo rettangolo, ed in questo parallelogrammo le diagonali, e la perpendicolare si sono intersecate nel vertice H, (1) non solo n'avvie-

(1) Erroneamente si dice vertice in H; perchè per effetto degli angoli acuti vi sono delle medesimazioni.

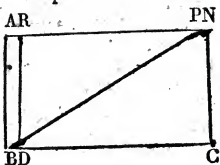
ne per la refinizione prima, che le diagonali, e la perpendicolare si sono divise per metà: ma bensì tutti i triangoli opposti sono tra loro eguali: e conseguentemente il triangolo HAS è eguale al triangolo opposto HDO, che come sopra sono entrambi formati dalla perpendicolare SO; dalle rette SA, OD; e dalla linea obhliqua AD, che si è intersecata in H coll' istessa SO. (1)

Dunque quando da una parte ecc.

---

(1) Si può dimostrare ancora nel modo, che segue.

Poichè essendosi unite come sopra le rette SA, OD colla perpendicolare SO: ed essendo, che dai punti A, e D si è tirata la linea obliqua AD, la quale è andata ad intersecarsi in H colla perpendicolare SO: ed essendo finalmente, che tanta distanza vi è da S ad A, quanto ve n'è da O a D, ad oggetto di essere SA eguale ad OD: così per necessità n'è avvenuto che tanto SO, quanto AD si sono divise per meta nell' istesso punto H: per cui non solo sarà SA eguale ad OD: ma bensi HS eguale ad HO; ed HA eguale ad HD: e conseguentemente sarà il triangolo HSA eguale al triangolo HDO.

Prop. IV. Teor. IV.

Presi insieme due triangoli, che sono risultati per effetto della diagonale tirata nel parallelogrammo, sono sempre mancanti nell' aia, relativamente a quella del parallelogrammo istesso.

Presi insieme i due triangoli NCD, ABP, risultati dalla diagonale NB, tirata nel parallelogrammo AC, sono sempre mancanti nell' aia, relativamente a quella dell' istesso parallelogrammo AC.

Dal punto D, in cui termina la porzione serrata BD, s' innalza DR parallela ad AB, in modo che forma il piccolo parallogrammo AD.

Poichè la diagonale NB, per la definizione seconda, ha diviso il parallelogrammo AC in due eguali triangoli NCD, ABP; ed

ha serrato, secondo si è detto nel teorema secondo, due eguali porzioni BD, PN; per cui i due triangoli NCD, ABP hanno perduto di altezza, di quanto sono l'istesse porzioni BD, PN; ed a tal riguardo hanno, per la definizione terza, perduto nell' aia di quanto sono i due piccoli triangoli, che uno si suppone basato sopra BD, l'altro sopra PN; e che, per la definizione quarta, uniti in sieme sono eguali al piccolo parallelogrammo AD, basato sopra la porzione BD.

Ed essendo, che i due triangoli NCD, ABP, prodotti dalla diagonale NB, perdono uniti insieme di quanto è il piccolo parallelogrammo AD: conseguentemente n'avviene, che questi due triangoli uniti insieme sono sempre mancanti, relativamente al parallelogrammo AC, di quanto è l' istesso AD.

Prop. V. Teor. V.

Abbenchè due parallelogrammi , pel teorema secondo , abbiano la base eguale ; pure l' aja del primo parallelogrammo sarà maggiore dell' aia del secondo.

Abbenchè il primo parallelogrammo AC abbia , per il secondo teorema , la base BC eguale alla base DS del parallelogrammo OD: pure l' aia del primo parallelogrammo AC è maggiore di quella del secondo parallelogrammo OD.

Per ottenersi un' esatta dimostrazione non solo il primo parallelogrammo dee essere rettangolo : ma AN ; dee essere stata allungata di quanto è l' istessa AN ; e propriamente sino al punto H. Dagli angoli ottusi OPD , OSD , che si sono formati , come abbiamo detto nel teorema secondo , dove terminano le porzioni di linee , che hanno serrato lo

spazio negli angoli esterni, ed acuti APB, HSK, si tira la diagonale PS; la quale, per la definizione seconda, divide il parallelogrammo OD in due eguali triangoli PSD, PSO, e si vengono a formare ancora due altri piccoli triangoli YNP, VCS. Indi dal punto D, dove, per l'istesso teorema secondo, è terminata la porzione BD delle linee BN, BC, s'innalza DR parallela ad AB, che viene a formarsi il piccolo parallelogrammo AD.

Poichè i triangoli VNP, VCS essendo formati dalla perpendicolare NC; dalle rette NP, CS, e dalla linea obbliqua, ossia dalla diagonale PS; perciò per il teorema terzo, i triangoli VNP, VCS sono eguali tra di loro; aggiuntovi il comune trapezio PVCD sarà, per l'assioma primo, tutto il triangolo NCD eguale a tutto il triangolo PSD, ch'è la metà del parallelogrammo OD, diviso dalla diagonale PS, che per la definizione seconda sono eguali tra di loro.

Ma per formarsi il secondo parallelogrammo OD la parallela AN si è allungata, una volta di più di quanto è l'istessa AN, per necessità il primo lato di OD l'ha dovuto formare la diagonale NB del parallelogrammo AC, la quale, per la definizione seconda, ha diviso AC in due eguali triangoli, per cui sarà ABP eguale ad NCD; abbiamo di-

mostrato NCD eguale a PSD; perciò, per l'assioma secondo, sarà PSD eguale tanto ad ABP, quanto ad NCD. Ed è poi PSD eguale a PSO; così PSO per l'assioma terzo, sarà eguale tanto ad ABP quanto ad NCD (1): onde avendo quattro triangoli PSD, PSO, ABP, NCD tutti eguali tra di loro: conseguentemente n'avviene, che i due triangoli PSD, PSO, che formano l'intero parallelogrammo OD sono, per l'assioma quarto, eguali ad ABP, NCD, che sono i due triangoli del parallelogrammo AC.

I due triangoli ABP, NCD perdono per la definizione quarta, di quanto è il piccolo parallelogrammo AD, perchè questi triangoli ABP, NCD perdono di altezza, pel teorema antecedente, di quanto sono le eguali porzioni BD, PN, essendosi, pel teorema secondo, egualmente serrate: e conseguentemente l'aia dei due triangoli presi insieme ABP, NCD è mancante, relativamente all'aja del parallegrammmo AC, di quanto è il piccolo parallelogrammo AD.

I due triangoli poi PSD, PSO, per effetto degli angoli acuti POS, PDS perdono di altezza, per la definizione terza, di quanto

(1) Ossia, essendo ABP eguale ad NCD; NCD eguale a PSD; PSD eguale a PSO: così sarà PSO eguale tanto ad ABP, quanto ad NCD,

sono alti i triangoli, che si suppongono basati sopra le porzioni BD, HO, le quali, pel teorema secondo, sono eguali tra di loro. (1)

Ma si potrebbe opporre, e dire, che se il parallelogrammo PSD ha perduto di altezza la porzione BD, ha acquistato, pel teorema secondo, l'eguale porzione CS, sopra di cui vi è basato il piccolo triangolo VCS. E se il triangolo PSO ha perduto di altezza la porzione HO, ha acquistato parimente l'eguale porzione NP, sopra di cui vi è basato il piccolo triangolo VNP: conseguentemente PSD, PSO non perdono affatto di altezza, relativamente al lato BC; perchè quel che perdono con BD; HO lo guadagnano con CS, NP, (2), e propriamente coi triangoli

---

(1) I triangoli che si suppongono basati sopra BD, HO, uniti insieme non sono perfettamente eguali ad AD, per la definizione quarta: come l'istessi ABP, NCD non formano perfettamente AC.

(2) Si replica a dire che le porzioni errate NP, CS si sono così allungate ad aggetto di potersi formare i triangoli VNP, VCS onde potersi ottenere la dimostrazione: mentre esse, atteso i piccoli lati che hanno formati gli angoli acuti, ed esterni; ed atteso la lunghezza delle basi rispettive, per loro natura sarebbero

VCS, VNP: e conseguentemente OD è eguale ad AC.

Si risponde in primo luogo, che PSD tanto ha acquistato col piccolo triangolo VCS, il quale è fuori di AC, e propriamente fuori del triangolo NCD, quanto ha perduto coll' eguale piccolo triangolo VNP, ch' è dentro l'aja di AC, e propriamente nel triangolo NCD, ed appartiene al triangolo PSO: e ciò è derivato, perchè il triangolo PSD per causa dell' obbliquità di PS, tanto ha acquistato nel lato DS colla porzione CS, quanto ha perduto nel lato PD colla porzione NP, ch' è comune al lato NA del parallelogrammo AC, ed al lato PO del triangolo PSO. Di vantaggio il triangolo PSO tanto ha acquistato col triangolo VNP, ch'è nell' aia di AC, quanto ha perduto con VCS, che appartiene a PSD: e ciò è parimente derivato; perchè PSO, per causa dell' obbliquità di PS, tanto ha acquistato nel lato PO colla porzione NP, quanto ha perduto nel lato OS colla porzione CS, che appartiene a PSD, ed è fuori di AC. Onde se PSO, PSD tanto hanno acquistato, quanto hanno perduto per mezzo dei respettivi lati

---

invisibili, ove è stato l'inganno di Euclide, ed è presentemente di tutti gli Euclidiani.

e dei respettivi loro triangoli VCS, VNP: conseguentemente n' avviene, che PSD, PSO sempre perdono di altezza, di quanto sono i triangoli, che suppongansi basati sopra BD, HO.

Si risponde in secondo luogo, e si conchiude, che avendo dimostrato PSD, PSO essere eguali ad ABP, NCD: ed essendo che ABP, NCD, come abbiamo dimostrato, perdono di quanto è la lunghezza, e larghezza del parallelogrammo AC: così n'avviene, che entrambi uniti PSD, PSO, che formano il parallelogrammo AD perdono all'istesso modo relativamente ad AC, di quanto è la lunghezza, e larghezza del parallelogrammo AD; perchè i triangoli che li suppongono basati sopra BD; HO uniti insieme sono parimente eguali ad AD (1); e conseguentemente OD non sarà eguale al parallelogrammo ABCN: ma al parallelogrammo RDCN, Dunque l'aia del primo parallelogrammo AC è maggiore dell' aja del secondo parallelogrammo OD. (2)

Ed abbenchè due parallelogrammi abbiano la base eguale: pure l' aja del primo pa-

---

(1) Definizione quarta.

(2) Questo teorema come sta dimostrato si rende un poco affannoso ai giovanetti.

rallelogrammo è maggiore dell' aia del secondo parallelogrammo.

Avvertimento.

La diagonale PS, che ha diviso il parallelogrammo OD ha prodotto gli angoli acuti anche nella base: e conseguentemente vi sarebbero altre mancanze per riguardo di tali angoli: ma PS si dee considerare come non vi fosse, e si è tirata ad oggetto di farne la dimostrazione: e conseguentemente ancora il lato NC del parallelogrammo AC si dee per parte di OD considerare come non esistesse: mentre i soli quattro lati PO, OS, SP, DP, che formano il parallelogrammo OD, sono di essenza.

Di vantaggio nell' opera titolata le nuove dimostrazioni matematiche, le obbliquità dei lati dei triangoli i sosceli, che sono nel cento novantadue agono, formano la perfetta rotondità del cerchio, e che a questi triangoli dee togliersi la base: mentre i lati obbliqui sono tanti raggi, che escono dall' esterno del novantasei agono, e giungono alla periferia; e conseguentemente in essa periferia non vi è affatto medesimazione.